高等学校数学科における関数電卓と GeoGebra 使用を前提とするモデリング教材の開発
ー漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材としてー

自然科学系教育サブプログラム（算数・数学）

立原　幹之

【指導教員】　松嵜　昭雄　　飛田　明彦　　西澤　由輔
【キーワード】　数学的モデリング　GeoGebra　関数電卓　『黒子のバスケ』

１．はじめに

筆者は，現在，微分方程式によるバスケットボールを題材としたモデリング教材の開発に向けて研究を進めている。具体的には，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした教材である。波形（2017）は，動的数学ソフトウェア GeoGebra（以下，GeoGebra）を用いて，漫画『黒子のバスケ』の一場面（図 1）を題材とした，高等学校数学科における教材研究をおこなっている。この一場面は，漫画『黒子のバスケ』の登場人物である，バスケットボールコート内であればどこからでもシュートを入れることができる緑間選手がスリーポイントシュートを決めた場面である。

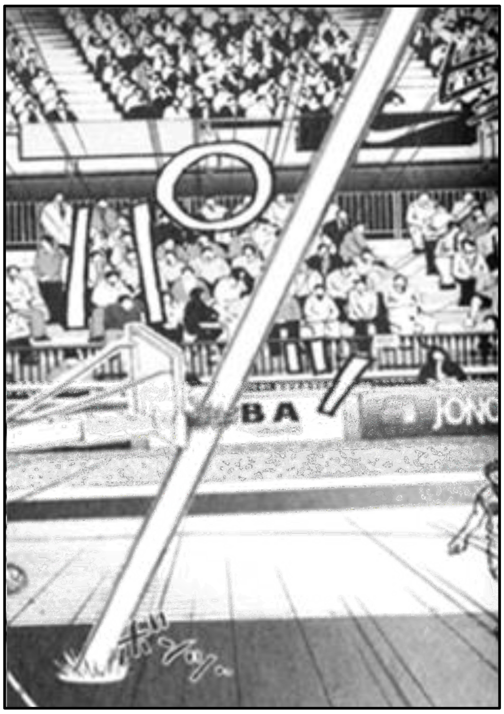

図 1　漫画『黒子のバスケ』のスリーポイント
シュートの一場面（藤巻, 2012）

筆者は，これまで，微分方程式によるバスケットボールを題材とした教材開発に向けて，波形（2017）が着目した，漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面（図 1）における数学的モデルの再検討をおこなった（Tachihara, 2022）。そして，微分方程式の変数の 1 つであるボールの初速度を変化させ，スリーポイントシュートの一場面の具体的な数学的モデルの記述をおこなった（立原・松嵜，2023）。また，筆者は，GeoGebra と関数電卓（カシオ計算機株式会社 fx-JP900-N）使用を前提として，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした射法投射に関するモデルの考察をおこなった（立原他，2023）。

本稿では，GeoGebra と関数電卓使用を前提として，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材としたモデリング教材の開発に向けておこなった研究成果を報告する。本稿におけるモデルの考察は，コンピューターモデルを付加したモデリングサイクル（Greefrath, 2011）にもとづいておこなう。

２．漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした GeoGebra と関数電卓使用を前提とするモデリング教材の開発の報告

ここでは，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした GeoGebra と関数電卓使用を前提とするモデリング教材の開発に向けておこなった教材研究ならびに教材開発について報告する。

2. 1. 数学的モデリング

数学的モデリングとは，実世界の問題が生じる場面から始まって，数学的モデルをつくり，妥当な結論が得られるまで数学的モデルを繰り返し修正していく一連の活動のことである（池田, 2010）。

松嵜・塚原（2016）は，複数の ICT の諸機能に着目する場合，コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクル（図 2）にもとづく説明が有用であるとしている。本研究も，GeoGebra と関数電卓を用いているため，コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクル（図 2）にもとづく説明が有用である。

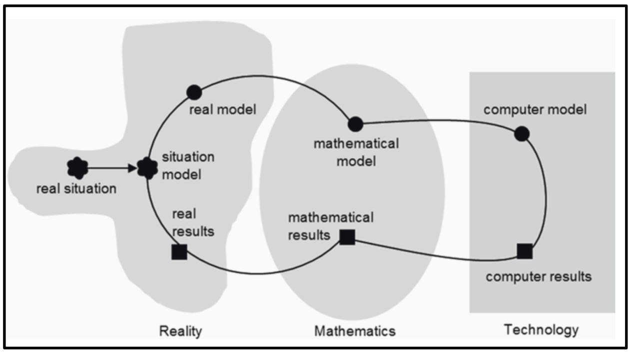

図 2　コンピューターモデルを付加した
モデリング・サイクル（Greefrath, 2011, p.302）

コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクルにもとづいて説明すると，GeoGebra によって出力された結果と，関数電卓によって出力された結果は，コンピューター結果である。

また，Greefrath（2011）は，「デジタルツールは…コンピュータで用いられる言語に翻訳され続けている。だから，ある特別なコンピュータモデルが構築されなくてはならない」（p.301）として，モデリング・サイクル（Blum＆Leiß, 2007）にテクノロジー世界を付加している。デジタルツールを用いたモデリングについて，Greefrath 他（2011）は，「例えば， DGS（動的幾何学ソフト），などのテクノロジーを使用する場合，テクノロジーによって作成された解を念頭に置く必要があるため，数学的な内省を行う必要がある」(p. 316）としており，テクノロジーによって作成された解の扱いにおける注意を促している。

2. 2. 漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面における数学的モデルの再検討

波形（2017）は，GeoGebra を用いて，以下の 3 点について教材研究している：①緑間選手がある位置からスリーポイントシュートを放った時のボールの軌跡について，②緑間選手が放つスリーポイントシュートの位置を変化させたときのボールの軌跡について，③ボールの速度に着目した放物線。ここでは，②緑間選手が放つスリーポイントシュートの位置を変化させたときのボールの軌跡を微分方程式を用いて表し，漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面における数学的モデルを再検討した結果について述べる。波形（2017）は，以下はの条件のもと，スリーポイントシュートの一場面について，GeoGebra を用いて，作図をしている。

- バスケットボールは真球とする。
- バスケットゴールリングは真円とする。
- シュートを放つ位置はゴールに対して真正面である。
- シュートを放った際，ボールの軌跡は放物線を描く。
- ボールの中心はゴールリングの中心を通り，その時ボールはゴールリングやゴールボードに触れないものとする。
- 地面からゴールリングの中心までの高さを，3m と設定する。
- x をゴールリングの中心の真下からまっすぐさがったときの距離（m），y を高さ（m）とする。

上記の設定条件に加え，Tachihara（2022）は，以下の条件を加え，スリーポイントシュートの一場面を再検討している。

［条件 1］ボールの重さを m (kg) とし，重力加速度を g (m/s^2) とする

［条件 2］ x 成分の初速度を $v_0\cos\theta$，y 成分の初速度を $v_0\sin\theta$ とする。

［条件 3］ ボールに働く水平方向の力を 0，鉛直方向の力を $-mg$ とする。

以上の条件にもとづき，x 成分と y 成分を，運動方程式を用いて表すと，以下のようになる。

$$x\text{成分} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad \ldots①$$

$$y\text{成分} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg \qquad \ldots②$$

また初期条件は，以下のようになる。

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(0)=v_0\cos\theta \\ v_y(0)=v_0\sin\theta \end{cases}$$

これより，①，②をもとに，x 成分，y 成分について，微分方程式を解く。

【x 成分】

①より，x 成分を，運動方程式を用いて表すと以下のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

ここで，$\frac{d^2x}{dt^2}$を，$\frac{dv_x}{dt}$と置換し，両辺を t で積分すると，

$$\int m\frac{dv_x}{dt}dt=\int 0dt$$

となり，さらに計算を進めると，

$$mv_x=\mathrm{C}_1 \quad \Rightarrow \quad v_x(t)=\frac{\mathrm{C}_1}{m}$$

ここで，初期条件より，

$$v_x(0)=v_0\cos\theta$$

である。よって，

$$v_x(0)=v_0\cos\theta=\frac{\mathrm{C}_1}{m} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}_1=mv_0\cos\theta$$

したがって，水平方向でのある時点での速さ v_x は以下のようになる。

$$v_x(t)=v_0\cos\theta$$

v_x を，$\frac{dx}{dt}$と置換し，両辺を t で積分すると，

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int v_0\cos\theta dt$$

となり，計算を進めると，

$$x(t)=v_0\cos\theta\cdot t+\mathrm{C}_2$$

ここで，初期条件より

$$x(0)=0$$

である。よって，

$$x(0)=0=v_0\cos\theta\cdot 0+\mathrm{C}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{C}_2=0$$

したがって，水平方向での，ある時点での位置 x は以下のようになる。

$$x(t)=v_0\cos\theta\cdot t$$

【y 成分】

x 成分と同様に計算すると，鉛直方向での，ある時点での y の位置は以下のようになる。

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\cdot t+3$$

その後，$x(t)=v_0\cos\theta\cdot t$を t について解き，

$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\cdot t+3$に代入すると，

$$y=-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2+v_0\sin\theta\cdot\frac{x}{v_0\cos\theta}+3$$

となる。これを，整理すると，

$$y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$$

よって v_0 と θ を固定して，

$$-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}=a,\ \tan\theta=b$$

と置くと，以下の放物線の式が得られる。

$$y=ax^2+bx+3$$

この放物線の式は，波形（2017）が用いた放物線の式と一致する。

2. 3. 漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面における具体的な数学的モデルの記述

ここでは，GeoGebra を用いて，2.2. において導出した，微分方程式を用いて求めた放物線の式 $y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$ に，条件を加え，緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができる具体的な数学的モデルを記述する。

波形（2017）は，一般的な学校の天井の高さが 15 m 以下で設計されていることから，天井の高さを 15 m と設定している。そして，2 次関数を用いて，緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができる位置を求めている。本稿では，スリーポイントシュートの一場面が，東京体育館のメインコートでおこなわれている場面であることから，天井の高さを 27 m と設定する（https://www.tef.or.jp/tmg/arena/）。また，波形（2017）は GeoGebra の 3D グラフィックス機能で作成したモデル（図 3）から，ボールの入射角を 70 度として教材研究をおこなっている。本稿でも，波形（2017）に倣い，ボールの入射角を 70 度とする。また，重力加速度を 9.8 m/s^2 とする。

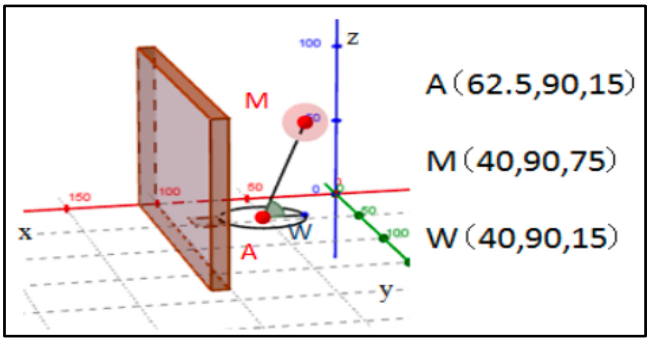

図 3　漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面のモデル（波形, 2017）

緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最小値は 6.75 m である（http://www.japanbasketball.jp/wp-content/uploads/Facility-equipment_2021.pdf）。GeoGebra を用いて水平距離の最小値から，ボールの初速度の最小値を求める。

初速度 v_0 を v とし，微分方程式を用いて表した放物線の式 $y=-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$ （Tachihara, 2022）を，GeoGebra の入力バーに入力すると，変数 g，v，θ のスライダーが作成される。ここで，条件より，$g=9.8$，$\theta=\frac{70\pi}{180}$ とする。天井の高さ $y=27$，シュートを放つ高さ $y=2$ を入力バーに入力する。また，水平距離の最小値が 6.75 m であることから，シュートを放つ位置 $x=6.75$ を入力する。v のスライダーの増分を 0.00000001 として動かす。放物線と $x=6.75$ の交点の y 座標が 2 となるときの v の値を表示すると，$v=9.8815947772638$ と表示される（図 4）。緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができるボールの初速度の最小値がおよそ 9.9 m/s であることがわかる。

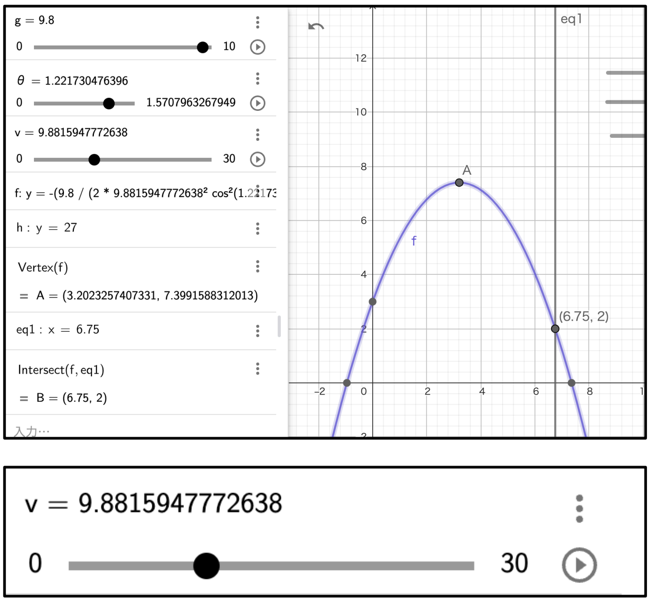

図 4　GeoGebra に出力された最小の v とそのときの放物線

緑間選手がスリーポイントスートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値を GeoGebra を用いて求める。

スライダーを動かし，天井の高さ 27 m からボールの半径 12.75 cm 低い 26.8725 m を超えない v の値を求める。その結果，$v=23.01925003$ のとき，ボールの高さ $y=26.87249999\ldots$ となり，26.8725 m を超えない最大の v の値となる（図 5）。

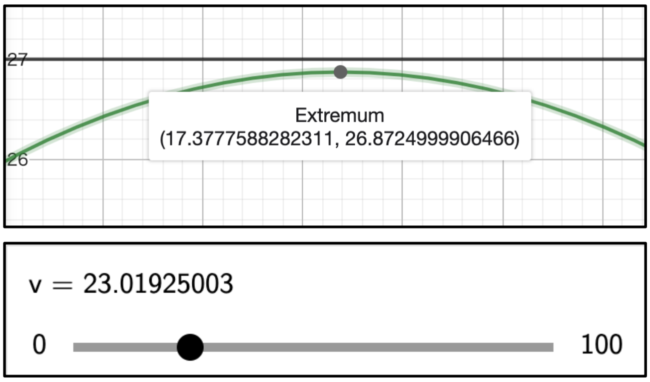

図 5　最大の v とそのときの放物線

v = 23.01925003 のとき，放物線の式 $y=-\frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$ とシュートを放つ高さ $y=2$ の交点を表示すると，水平距離 x = 35.11575408…となり，これが水平距離の最大値である（図 6）。

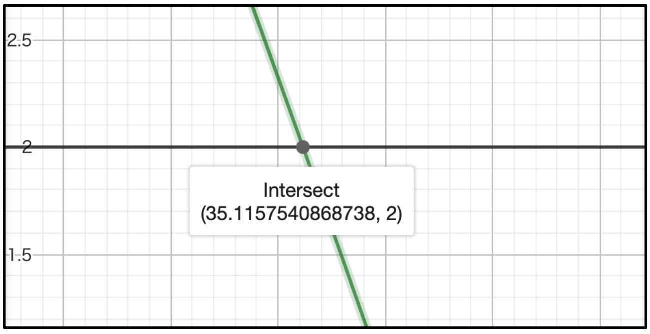

図 6　GeoGebra に表示されたゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値

ここで，バスケットコートの長さは，28 m である。水平距離の最大値 35.11575408…はバスケットコートの外からのスリーポイントシュートとなってしまうため，バスケットコートの中からのスリーポイントシュートを決めることができる水平距離の最大値を求める。そこで，緑間選手が，バスケットコート内でスリーポイントシュートを入れることができる位置の最大値を求め，そのときの初速度を最大値とする。

まず，緑間選手が，バスケットコート内でスリーポイントシュートを入れることができる位置の最大値を求める。緑間選手が，バスケットコート内でスリーポイントシュートを決めることができる位置の最大値を通る放物線は，放たれたボールの中心が，初期位置とは反対の位置にあるゴールリングの先端から，ボールの半径の長さだけ初期位置に近い点を通る。反対側のバスケットコートの端は，26.425 m の地点にあり，ゴールリングの先端は，24.625 m の地点にある。また，ゴールリングの高さは 3 m である。ボールの半径が 0.1225m のため，放物線が，(x, y) = (24.4975 , 3)の点を通ればよいとわかる。GeoGebra の入力バーに，(26.425 , 3)と(24.625, 3)を入力し，2 点を線分で結ぶ。これは，反対側のバスケットコートの端と，ゴールリングの先端を結ぶ線分である。また，(24.4975 , 3)を入力する。これは，放物線が通る点である。GeoGebra の入力バーに x = 24.4975 を入力する。GeoGebra で表示されたグラフにおいて，y=2，放物線の交点が緑間選手がスリーポイントシュートを放った位置である。スライダーを動かし，放物線と x = 24.4975 の交点の y 座標が 3 となる放物線を GeoGebra に出力する。

v=19.3259197865309…のとき放物線と x = 24.4975 の交点の y 座標が 3 となる。したがって，緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができる水平距離の最大値におけるボールの初速度の最大値は，およそ 19.3 m/s であるとわかる。

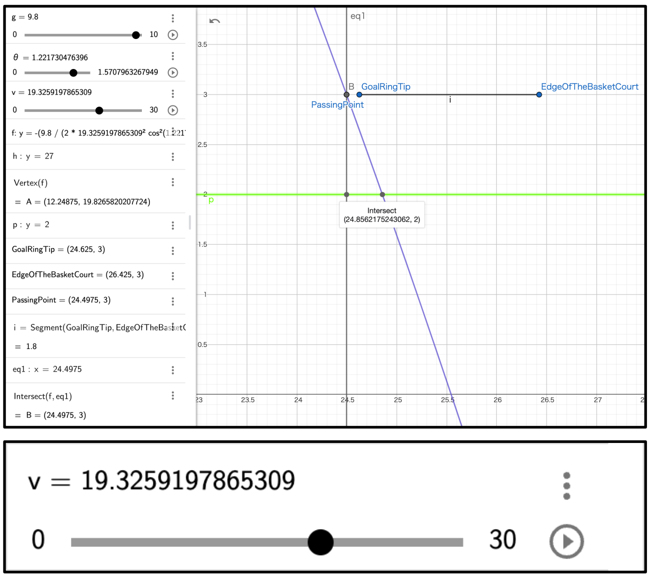

図 8　緑間選手がバスケットコート内でスリーポイントシュートを決めることができるボールの初速度の最大値

緑間選手が放つスリーポイントシュートのボールの初速度の最小値，最大値をから，緑間選手が放つスリーポイントシュートのボールの初速度の範囲は，秒速で表すと，およそ 9.9 ≦ v_0 ≦ 19.3 であるとわかる。以下に，本稿で記述した設定条件をもとにした，数学的モデルを記述する

$$y=-\frac{9.8}{2{v_0}^2\cos^2\frac{70\pi}{180}}x^2+\tan\frac{70\pi}{180}\cdot x+3\ \ (9.9\leqq v_0\leqq 19.3)$$

2. 4. 漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした射法投射に関するモデル

ここでは，GeoGebra と関数電卓（カシオ計算機株式会社 fx-JP900-N）使用を前提として，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした射法投射に関するモデルの考察をおこなう。モデルと条件は以下の通りである。

微分方程式を用いて表した放物線の式 $y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$ を用いて，スリーポイントシュートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値を求めよ。ただし，条件を以下の通りとする。

- シューターの位置はゴールに対して真正面であり，2m の高さから放つとする。
- ボールは，ゴールリングの中心から放たれるものとし，初速度を v_0（m/s）とする。
- 地面からゴールリングの中心までの高さを，3m と設定する。
- x をゴールリングの中心の真下からの水平距離（m），y を体育館の床からの高さ（m）とする。
- 重力加速度 g = 9.8（m/s²）とする。
- 天井の高さを 27（m）とする。
- ボールのゴールリングに対する入射角 θ=70°とする。
- ボールの直径を 25.5（cm）とする。

なお，ここでの条件は，波形（2017）と立原・松嵜（2023）を参考にしている。

GeoGebra 使用を前提としたモデリングは，**2. 3.** と同様である。ここでは，関数電卓使用を前提としたモデリングを記述する。

微分方程式を用いて表した放物線の式 $y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$（Tachihara, 2022）を平方完成すると，$y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{{v_0}^2\sin2\theta}{2g}\right)^2+\frac{{v_0}^2\sin^2\theta}{2g}+3$ となる。v_0 を x とし，頂点の y 座標 $f(x)=\frac{x^2\sin^2 70°}{2\times9.8}+3$ が天井を超えない最大値 x を求める。

ここでは，関数電卓の「数表作成」モードを使用する。「数表作成」モードでは，1 つまたは 2 つの関数式にもとづく数表を作成することができる。「数表作成」モードを選択し，$f(x)=\frac{x^2\sin^2 70°}{2\times9.8}+3$ を入力する。天井の高さ 27 m を超えない最大の整数 x の値を求めるために，開始値に 1，終了値に 30，ステップ値に 1 を入力する。すると，x=23 のとき，$f(x)$＝26.83258955 と表示される（図 9）。

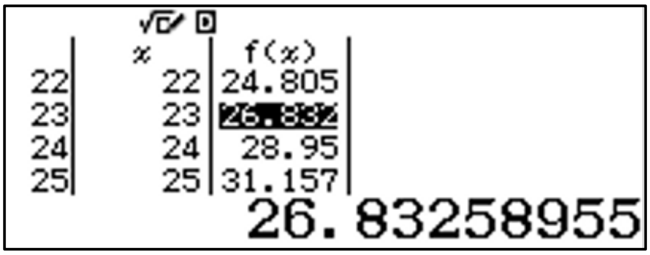

図 9　x＝23 のときの $f(x)$ の値

より正確な x の値を求めるために，ステップ値をより小さな値にしていくと，x の値は，23≦x≦24 の範囲内にあることになる。開始値に 23，終了値に 24，ステップ値に 0.1 を入力する。すると，x＝23.1 のとき，$f(x)$＝27.04027998 と表示される（図 10）。

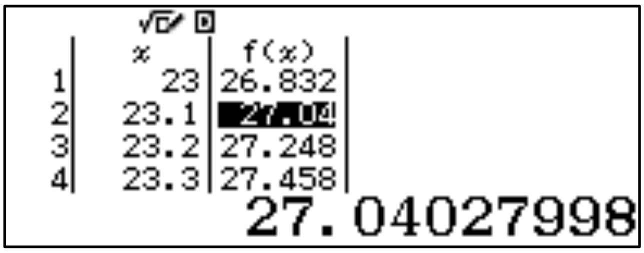

図 10　x＝23.1 のときの $f(x)$ の値

図 4 より，より正確な x の値は，23≦x≦23.1 の範囲にあることがわかる。開始値に 23，終了値に 23.1，ステップ値に 0.01 を入力すると，x = 23.01 のとき，$f(x)$ = 26.85331805 と表示される（図 11）。

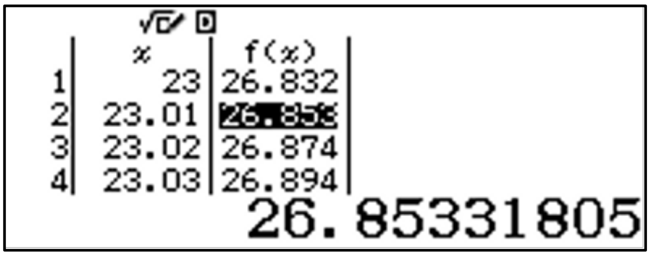

図 11　x＝23.02 のときの $f(x)$ の値

更にステップ値を小さくしていき，開始値に 23.01925，終了値に 23.0192501，ステップ値に 0.00000001 を入力すると，x＝23.01925003 のとき，$f(x)$＝26.87249999 と表示される。なお，表示は，整数 2 桁と小数第 3 位までであるが，カーソルを合わせると小数第8位までの値が表示される（図12）。

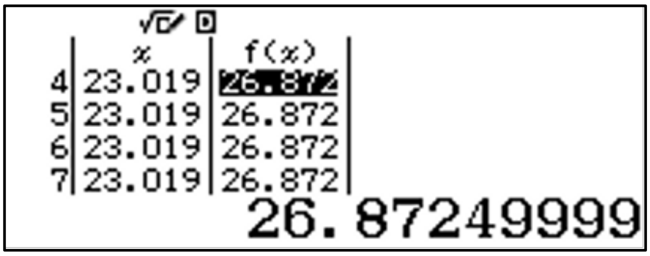

図 12　最大の $f(x)$ の値の表示

初速度 v_0 を x としていたため，v_0 の最大値は 23.001925003 である。次に，関数電卓のソルブ機能を使用する。関数電卓のソルブ機能では，方程式の解をニュートン法を使って近似値で求めることができる。「基本計算」モードを選択し，初速度を A として，$y=-\frac{9.8}{2\mathrm{A}^2\cos^2 70°}x^2+\tan70°\cdot x+3$ を入力する。ソルブ機能を使用し，y=2，A＝23.01925003 を代入すると，x=35.11575409 と表示される。これはスリーポイントシュートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値である（図 13）。

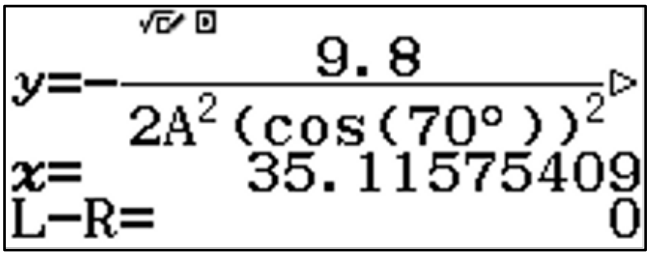

図 13　関数電卓で表示されたゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値

GeoGebra と関数電卓を使用し，漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした射法投射に関する数学的モデルを考察した結果，スリーポイントシュートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値は，GeoGebra，関数電卓ともに，35.11575409（m）となった（図 8，図 13）。スリーポイントシュートを決めることができるゴールリングの中心の真下からの水平距離の最大値は，

GeoGebra，関数電卓ともに，35.11575409（m）であり，バスケットコートの縦の長さは，28（m）である。したがって，緑間選手はコート内ならどこからでもスリーポイントシュートを決めることができることが確認できる。

2.5. 大学生対象のモデリングワークショップ

2023（令和5）年8月30日に，静岡県内国立大学数学科教員免許状取得希望学生15名を対象のワークショップを実施した。ワークショップは，以下の流れで実施する（表1）。

表1　ワークショップの展開

	○ワークショップの展開
導入	○令和5年度大学入学共通テスト本試験の「数学I・数学A」第2問［2］を知る。 ○漫画『黒子のバスケ』の一場面を把握する。 ○漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした現実的モデルと射法投射に関する数学的モデルを確認する。
展開	○GeoGebra 使用を前提としたモデリングをおこなう。 ○関数電卓使用を前提としたモデリングをおこなう。 ○授業者のモデリングの一例を知る。
まとめ	○課題を確認する。 GeoGebra と関数電卓使用を前提とした問題解決過程を比較し，その異同を記述しなさい。

ここでは，学生ら記入したワークシートをもとに，次の3点に着目して，ワークショップの実際を報告する：学生らは，GeoGebra使用を前提としたモデリングにおいて，スライダー機能を用いることで，出力されたグラフの動的な変化から x の最大値を視覚的に捉えることができるか。学生らは，関数電卓使用を前提としたモデリングにおいて，数値で x の最大値を捉えることで，微小な変化を捉えることができるか。学生らは，GeoGebraと関数電卓に出力されたコンピューター結果をどのように扱い，現実的結果として結論づけたか。

学生15名全員が，GeoGebra のスライダー機能を用いることで，出力されたグラフの動的な変化から x の最大値を視覚的に捉えることができていた。また，学生15名のうち2名が，関数電卓を使用し，数値でxの最大値を捉えることで，微小な変化を捉えることができていた。学生YSは，放物線$y=-\frac{9.8}{2v_0{}^2\cos^2 70°}x^2+\tan 70°\cdot x+3$と天井の高さからバスケットボールの半径の長さを引いた直線をGeoGebra上に表示し，スライダーの増分を0.00000001として動かし，放物線と直線が接するときを水平距離の最大値として視覚的に求めている（図14）。

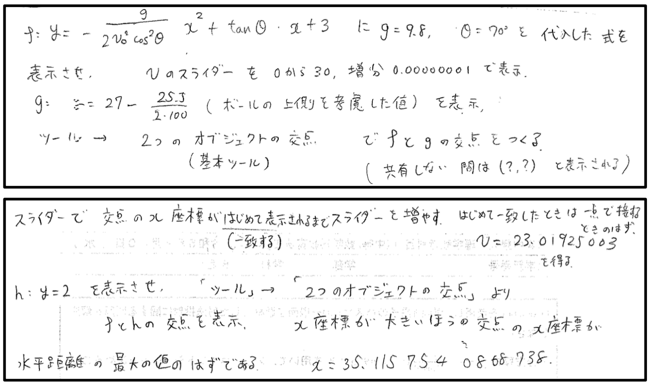

図14　学生YSのワークシートの記述

学生TYは，放物線 $y=-\frac{9.8}{2v_0{}^2\cos^2 70°}x^2+\tan 70°\cdot x+3$ の頂点のy座標から天井の高さを引いてボールの半径を足した式を求め，関数電卓の「数表作成」モードを用いて初速度を代入している。そして，初速度を代入し，出力された頂点の y 座標から天井の高さを引いてボールの半径を足した値が正の数から負の数となる境を数表から求めている。ステップ値を0.1，0.01とより小さな値とすることで初速度の最大値を数値で捉え，微小な変化を捉えている。また，求めた初速度の値と，緑間選手がシュートを放つ高さ2mから，水平距離の最大値を求めていた（図15）。

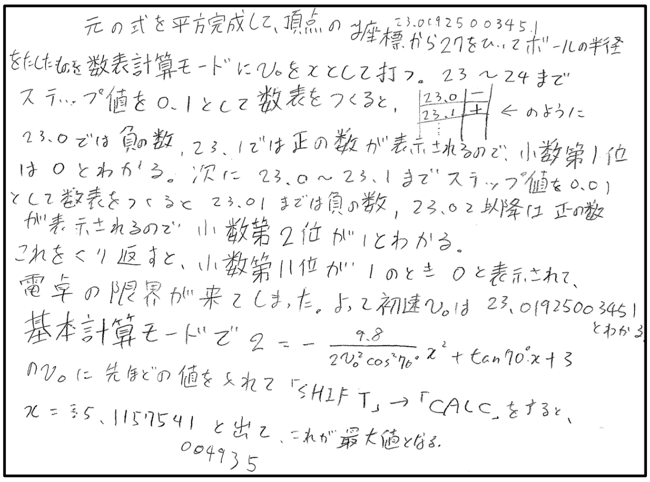

図15　学生TYのワークシートの記述

学生HKは，GeoGebraと関数電卓を用いる際のモデリングの異同について，「v_0の値を変えて，頂点とy=26.8725の差を0に近づけるときに，GeoGebraは超えるか超えないかを視覚的に確認し，値を変えたが，関数電卓は，表で比較しながら変えた」と記述している（図16）。

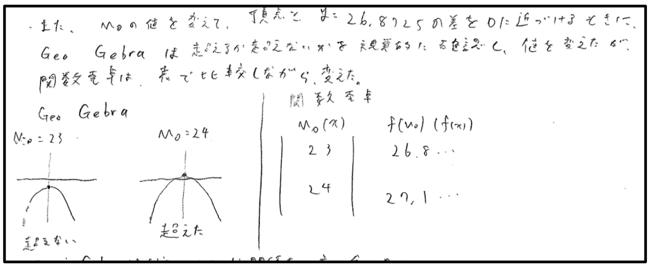

図16　学生HKのワークシートの記述

ここでは，学生らが，GeoGebraと関数電卓に出力されたコンピューター結果をどのように扱い，現実的結果として結論づけたかについて，ワークシートの記述をもとに明らかにする。GeoGebraに出力されたコンピューター結果について，学生15名のうち，GeoGebraに出力されたコンピューター結果をそのまま現実的結果とした学生は14名であり，GeoGebraに出力されたコンピューター結果をそのまま現実結果とせず，バスケットコートの長さを考慮するといった数学的な内省をおこなった学生は1名であった。学生IRは,「$x=35.115754$ m と分かるので，（コートの長さ）を考慮すると，コート内のすべての場所からスリーポイントシュートを決めることが分かった」と記述している（図17）。

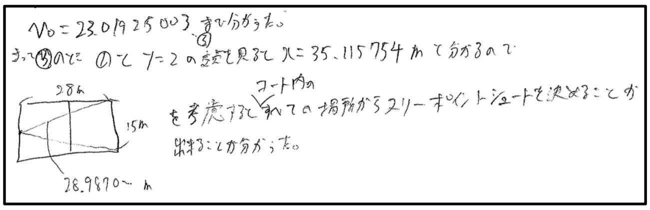

図17　学生IRのワークシートの記述

また，関数電卓に出力されたコンピューター結果について，学生15名全員が関数電卓に出力されたコンピューター結果をそのまま現実的結果としていた。これにより，GeoGebra使用を前提としたモデリングでは14名の学生が，関数電卓使用を前提としたモデリングでは15名すべての学生がGeoGebraと関数電卓の出力結果であるコンピューター結果とバスケットコートの長さである現実的結果の誤謬をおかしていることが確認できた。

ワークショップでは，GeoGebra使用を前提としたモデリングをおこなったのち，関数電卓使用を前提としたモデリングをおこなっている。学生IRは，関数電卓に出力されたコンピューター結果に関しては，そのまま現実的結果としていた。このことから，学生IRは，バスケットコートの長さは考慮しつつ，関数電卓に出力されたコンピューター結果を現実的結果として扱っているのではないだろうか。

学生NTは, GeoGebraを用いる際のモデリングにおいて，射法投射に関する数学的モデルと条件を，座標平面上に表している。また, バスケットコートの長さについても記述している（図18）。

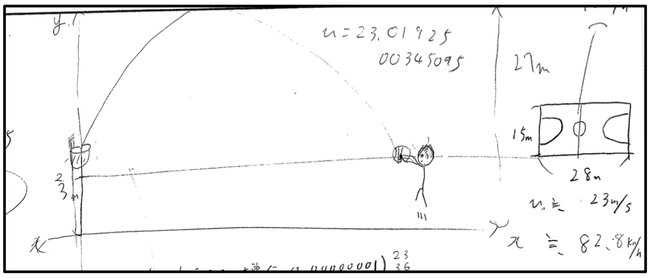

図18　学生NTのワークシートの記述

学生NTのワークシートの記述から，学生NTは，バスケットコートの長さを考慮していることがわかる。一方で, 現実的結果は，$x=35.1157541004925$ であると記述している。このことから，学生IRと同様に，学生NTは，バスケットコートの長さは考慮しつつ，関数電卓に出力されたコンピューター結果を現実的結果として扱っているのではないだろうか。

2. 6.　コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクル

ここでは，GeoGebraと関数電卓使用を前提とするモデリング教材とワークショップにおけるワークシートの記述について, コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクル（Greefrath, 2011）にもとづいて説明する。

コンピューターモデルを付加したモデリング・サイクル（図2）において，漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面は現場面（situation model）である。波形（2017）が教材研究している2つの軌跡と1つの放物線は現実モデル（real model）である。微分方程式を用いて求めた放物線の式 $y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\cdot x+3$ (Tachihara, 2022) は数学的モデル (mathematical model) である。GeoGebraのスライダーツールと，関数電卓の「数表作成」モードはコンピューターモデル（computer model）である。GeoGebraに出力されたグラフの動的な変化と，関数電卓に出力された数表はコンピューター結果（computer result）である。緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができる水平距離の最大値，最小値と初速度の範囲は数学的結果（mathematical result）である。2.3. で記述した放物線の式 $y=-\frac{9.8}{2{v_0}^2\cos^2\frac{70\pi}{180}}x^2+\tan\frac{70\pi}{180}\cdot x+3$　($9.9 \leqq v_0 \leqq 19.3$) は具体的な数学的モデル（mathematical model）である。緑間選手がスリーポイントシュートを決めることができる水平距離が現実的結果（real result）である。学生らのワークシートの記述から，GeoGebraと関数電卓の出力結果であるコンピューター結果とバスケットコートの長さである現実的結果の誤謬をおかしていることが確認できた。

３．おわりに

今後，高等学校数学科における教材として，コンピューター結果を解としてみなすのではなく，数学的な内省をおこなってから解としてみなすことの必要性を生徒らが感じることのできるモデリング教材の開発に取り組んでいく。

註．本研究は，埼玉大学がカシオ計算機株式会社と締結した受託研究「数学授業における関数電卓実用化とグローバル展開」（研究代表者：松嵜昭雄）の助成を受けている。

引用・参考文献

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?, In C Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics, pp. 222-.231, Horwood.

藤巻忠俊（2012）『黒子のバスケ』20 巻 集英社

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp.301-304). Springer.

Greefrath, G., Siller, H. S., & Weitendort, J. (2011). Modelling considering the influence of technology, In G. Stillman. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp.316). Springer.

池田敏和（2010）「数学的モデル化」『数学教育学研究ハンドブック』pp. 272-281 東洋館出版社

松嵜昭雄・塚原康介（2016）「ICTs の諸機能に着目したモデリング評価に関する一考察－教具レゴとグラフ電卓を併用した実験・観察型アプローチによるモデリング・ワークショップ－」『日本科学教育学会研究会研究報告』 Vol.30 No.6, pp. 33-38

波形政輝（2017）「GeoGebra による投射した物体の描く軌跡に関する一考察－漫画『黒子のバスケ』のスリーポイントシュートの一場面に着目して－」『数学教育学会 2017 年度春季年会予稿集』pp.8-10.

Tachihara, M. (2022, December). Towards the development of teaching materials for differential equation based on the trajectory of basketball: Reconsidering the mathematical model of a three-point shots in the manga “The Basketball which Kuroko plays”. Oral Presentation at 10th International Conference of Research on Mathematics and Science Education. Online.

Tachihara, M., Matsuzaki, A. (2023). Changes of mathematical models that can be represented by changing the slider tool in GeoGebra: Focus on the trajectory of basketball in one scene of the manga “The Basketball Which Kuroko Plays”, *The 21th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* Awaji.

立原幹之・松嵜昭雄（2023）「漫画『黒子のバスケ』の一場面の数学的モデルの記述－微分方程式と GeoGebra によるスリーポイントシュートの検討を通して－」『2023 年度第 27 回数学教育学会大学院生等発表会予稿集』pp.37-42.

立原幹之・松嵜昭雄・棚澤日菜子（2023）「漫画『黒子のバスケ』の一場面を題材とした射法投射の数学的モデルの一考察－GeoGebra と関数電卓使用を前提としたモデリングの比較を通して－」『2023 年度数学教育学会秋季例会予稿集』 pp. 130-132.

立原幹之・松嵜昭雄（2024）「数学的モデリングにおける GeoGebra と関数電卓の出力結果の誤謬－漫画の一場面を題材とした大学生対象ワークショップの事例研究－『2024 年度第 28 回数学教育学会大学院生等発表会予稿集』（印刷中）